CURVE A DIAMETRO COSTANTE

Angelo Ricotta

a.ricotta@isac.cnr.it

Il famoso fisico americano Richard P. Feynman, scomparso nel 1988, si dice che fosse una fonte continua d'ispirazione per chi lo conosceva personalmente a causa del trascinante entusiasmo con cui si occupava di qualsiasi problema fosse esso semplice o complesso.
I suoi libri sono disseminati di acute osservazioni e di svariati problemi, sovente associati a scherzi, per mettere alla prova la perspicacia del lettore. In uno di essi[1], alle pp.167-168, Feynman racconta come, nell'ambito delle indagini sulle cause del tragico incidente occorso alla navetta spaziale Challenger, si trovasse a considerare le proprietà delle curve a diametro costante. Egli mostra un disegno, eseguito di sua mano, di una curva di tal fatta. Quel disegno fatto a mano m'incuriosì, mi chiesi se vi fossero delle semplici espressioni analitiche per generare tali tipi di curve, e trovai due modi elementari per ottenerle. Mi accorsi anche che almeno la nota curva detta "lumaca" di Étienne Pascal, padre del più famoso Blaise Pascal, godeva di tale proprietà. Realizzai inoltre che esse erano diverse dalle più note curve ad ampiezza costante[2,3]. Poiché, a mio parere, nella descrizione di Feynman i due tipi di curve non venivano ben distinti, anzi sembrava venissero confusi, decisi di indagare un po' più a fondo[4].

Curve a diametro costante come modulazione di una circonferenza

Una curva a diametro costante è una curva piana, semplice e chiusa, i cui diametri condotti attraverso un punto interno sono tutti uguali. Queste curve non vanno confuse con quelle ad ampiezza costante che vengono definite come curve piane semplici, chiuse e convesse, comprese tra due rette parallele a distanza costante con le quali sono sempre in contatto comunque siano ruotate. Una differenza rilevante fra i due tipi di curve è che le prime possono essere sia concave che convesse mentre le seconde sono solo convesse, per definizione.
Ad esempio la circonferenza è una curva a diametro costante ma essa è anche ad ampiezza costante e, addirittura, a raggio costante.
L'equazione polare di una circonferenza centrata nell'origine è $r(\vartheta) = r = \text{costante}$. Per ottenere delle curve a diametro costante diverse da una circonferenza si può far variare r in funzione dell'angolo ϑ.

Deve essere, per ogni angolo ϑ,

$$\begin{cases} a)\ r(\vartheta) = r(\vartheta + 2\pi) \\ b)\ r(\vartheta) + r(\vartheta + \pi) = \text{costante} \end{cases}$$

La *a)* esprime la proprietà di curva chiusa mentre la *b)* esprime la condizione di diametro costante. Affinché il concetto di diametro costante abbia un significato non ambiguo, come già richiesto dalla definizione e come vedremo meglio nel seguito, oltre alle condizioni di cui sopra occorre che

$$\begin{cases} \text{c) la curva non si autointersechi} \\ \text{d) il polo sia interno ad essa} \end{cases}$$

Ipotizziamo per la distanza dal polo la forma $r(\vartheta) = r + \cos(k\vartheta)$ e determiniamo i valori di r e k che soddisfano le condizioni *a, b, c, d.*

Per la *a)* è $r + \cos(k\vartheta) = r + \cos\left[k(\vartheta + 2\pi)\right]$ affinché $r(\vartheta)$ sia periodica di periodo $\frac{2\pi}{k}$. Per la *b)* deve essere $r + \cos(k\vartheta) + r + \cos\left[k(\vartheta + \pi)\right] = \text{costante}$, ciò si può ottenere se k è dispari per cui si ha $\cos(k\vartheta) = -\cos\left[k(\vartheta + \pi)\right]$e quindi $2r = \text{costante} = \text{diametro}$.

Per soddisfare la condizione *c)* $r(\vartheta)$deve essere monodroma.

Per soddisfare la condizione *d)* deve anche essere $r(\vartheta) \neq 0$ per ogni ϑ, dato che il polo è l'origine del riferimento.

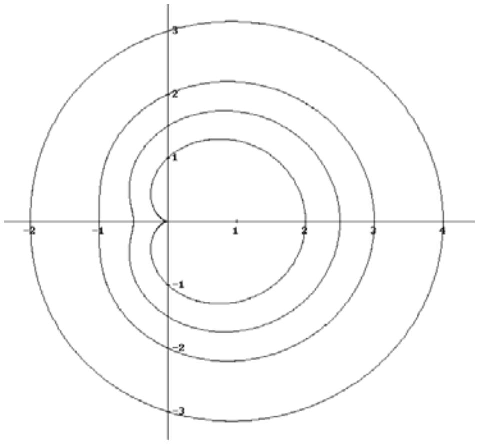
Per verificare queste ultime due condizioni si può studiare l'andamento della funzione $f(\vartheta) = r + \cos(\vartheta)$ avendo posto $k = 1$ in quanto il suo valore è inessenziale ai nostri fini perché incide solo sul periodo della funzione $f(\vartheta)$ ma non sull'autointersezione che è un fatto topologico.

Poiché il coseno varia da -1 a 1 affinché $f(\vartheta)$ non si annulli mai (condizione *d)*) deve essere $r < -1$ oppure $r > 1$.

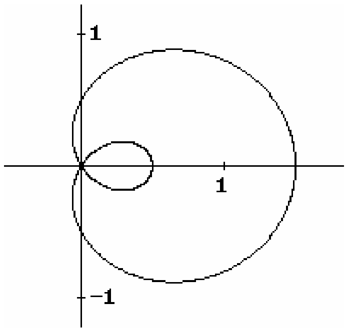
Affinché la curva non si autointersechi $f(\vartheta)$ non deve mai cambiare di segno ma questa condizione è già soddisfatta dalla limitazione precedente in quanto, essendo $f(\vartheta)$ una funzione continua, per cambiare di segno dovrebbe prima annullarsi.

Infine possiamo considerare l'unica condizione $r > 1$ in quanto l'altra fornisce soluzioni simmetriche.

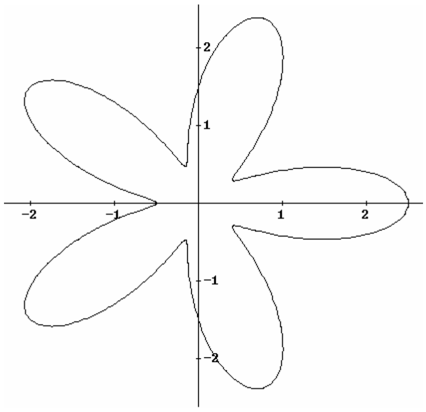
Esempi di $f(\vartheta)$ per alcuni valori del parametro $r = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$, corrispondenti alle curve dalla più interna alla più esterna, sono mostrati nella figura seguente



Come si vede nel caso $r = 1$ il polo coincide con un punto della curva: è un caso limite in cui può avere ancora senso il concetto di curva a diametro costante se si esclude il polo nella determinazione della distanza fra i punti della curva. Inoltre, analizzando l'andamento della coordinata $x = \left(r + \cos(\vartheta)\right)\cos\vartheta$ nell'intorno di $\vartheta = \pi$, si può vedere che la curva è concava per $r < 2$ e convessa per $r \geq 2$.
Per valori $r < 1$ la curva si autointerseca come si può vedere nella figura sotto in cui $r = \frac{1}{2}$



e il concetto di diametro costante perde il suo più immediato significato.
Le curve a diametro costante possono assumere aspetti che a prima vista non manifestano questa loro proprietà, infatti si osservi la curva seguente di equazione $f(\vartheta) = \frac{3}{2} + \cos(5\vartheta)$



il cui polo è sempre l'origine e il cui diametro costante è pari a *3*.

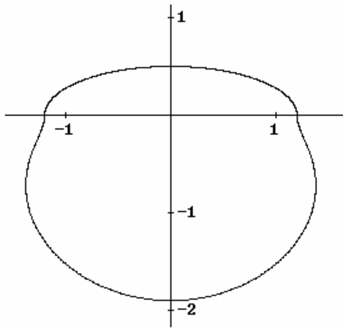
Ci vuole un po' prima di realizzare che *tutti* i diametri sono uguali.

Curve a diametro costante come continuazione di una curva data

Un altro modo per costruire una curva a diametro costante può essere quello di partire da un segmento di curva e continuarlo utilizzando le condizioni *a, b, c, d.* Ad esempio sia dato un segmento di ellisse di equazione polare

$$\rho(\vartheta) = \frac{ab}{\sqrt{(a\sin\vartheta)^2 + (b\cos\vartheta)^2}} \qquad \text{con } 0 \le \vartheta \le \pi$$

Esso interseca l'asse x nei punti $-a$ e a. Se $\rho(\vartheta) < 2a$ assunto $2a$ il diametro costante della curva da costruire, la curva continuazione di quella data rispetto all'origine del riferimento e che soddisfa le condizioni *a, b, c, d* sarà $\rho(\vartheta+\pi) = 2a - \rho(\vartheta)$. Graficando sia $\rho(\vartheta)$ che $\rho(\vartheta+\pi)$ con $a = 1.2$ e $b = \frac{1}{2}$, si ottiene



Conclusioni

Abbiamo visto alcune delle forme che possono acquisire le curve a diametro costante e abbiamo analizzato due metodi per ottenere delle semplici espressioni analitiche di esse. Un modo meccanico di generarle è quello di far scorrere attraverso un punto un segmento disegnando una curva con i suoi estremi. Tali curve possono essere sia concave che convesse, laddove le curve ad ampiezza costante sono solo convesse. Le curve qui analizzate si possono considerare una sottoclasse delle concoidi generalizzate che vengono costruite partendo da un punto, il polo, una curva chiusa o aperta, e un segmento, il diametro, il quale passa attraverso il polo e interseca la curva data dalla quale viene bisecato: i punti estremi del segmento generano un luogo geometrico chiamato concoide generalizzata. Con questa definizione e con semplici estensioni delle proprietà precedentemente enunciate si possono costruire curve e superfici a diametro costante anche nello spazio 3D e in dimensioni superiori.

Ritornando a Feynman, da quel che scrive nel libro già citato, sembra che i tecnici della NASA avessero misurato tre diametri dell'o-ring sotto

accusa, ad angoli di *60°* gli uni dagli altri, per accertarne le deviazioni dalla circolarità. Mi risulta che gli specialisti del settore sanno bene che questi tipi di misure non possono determinare le deviazioni dalla circolarità di un profilo, infatti essi adoperano sagome circolari per tali controlli(3). Feynman poi porta l'esempio del triangolo di Reuleaux(3) che è una curva ad ampiezza costante ma non a diametro costante! In aggiunta il suo disegno(1), Fig.17 di p.168, mostra delle vistose concavità ed è evidentemente, nelle intenzioni, una curva a diametro costante! Si capisce come egli sparga abbondante confusione nell'ormai palese intento di attrarre l'attenzione del lettore sulle differenti proprietà delle curve in questione.
Dulcis in fundo egli afferma di aver visto da ragazzo, in un museo, un marchingegno meccanico costituito da ingranaggi i cui profili erano curve a diametro costante e che facevano muovere un piano in modo perfettamente orizzontale. Egli invece deve aver visto ingranaggi i cui profili erano curve ad ampiezza costante in quanto solo le proprietà(3) di queste ultime si prestano ad essere usate in meccanismi del genere. Ritengo Feynman troppo raffinato per non rendersi conto della differenza, inoltre le proprietà delle curve ad ampiezza e a diametro(5) costante sono ben note ai matematici, anche se io non sono riuscito a trovare cenno di queste ultime in scritti divulgativi, e perciò è probabile che esse non siano conosciute dai non specialisti.
Comunque propendo a credere che questo sia stato uno dei suoi tanti, stimolanti scherzi.
Concludo con una piccola sfida per il lettore: dimostrare quali e quante sono le curve a diametro costante che sono anche ad ampiezza costante. Inviatemi pure le vostre soluzioni, pubblicherò le più eleganti su questo sito.

Bibliografia

1) R.P.Feynman, "What do you care what other people think?", W.W. Norton & Co., N.Y.- London, 1988
2) D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, "Geometria Intuitiva", Boringhieri, Torino, ristampa 1967 (op. orig.1932)
3) M. Gardner, "Giochi Matematici", vol. 4°, Sansoni, Firenze, 2ª ristampa 1979 (op. orig. 1966).
4) A. Ricotta, "Constant-Diameter Curves", The Mathematical Intelligencer **25**, no. 4, 2003, 4-5.
5) M. Rychlik, "A complete solution to the Equichordal Problem of Fujiwara, Blaschke, Rothe and Weitzenböck", Inventiones Mathematicae **129**, issue 1, 1997, 141-212.

